

Булевы функции

Определение. Булевой функцией от n аргументов называется функция f , заданная на множестве $\{0,1\}^n$ и принимающая значения в двухэлементном множестве $\{0,1\}$.

Другими словами, булева функция от n аргументов сопоставляет каждому упорядоченному набору длины n , составленному из элементов 0 и 1, либо 0, либо 1.

Булева функция f от n аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n$ обозначается так: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Две булевы функции от n аргументов $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называются равными, если любым одинаковым наборам значений аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n$ обе эти функции сопоставляют одинаковые элементы из множества $\{0,1\}$, т.е.

$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = g(a_1, a_2, \dots, a_n)$ для любых элементов $a_1, \dots, a_n \in \{0,1\}$.

Теорема 1. Число различных булевых функций от n аргументов равно 2^{2^n} .

Теорема 2. Всякая булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ может быть представлена в виде суперпозиции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания; причём знак отрицания стоит только непосредственно около переменной и не стоит ни перед одной из внутренних скобок.

На основании этой теоремы, всякая булева функция может быть представлена некоторой формулой алгебры высказываний.

Всякая формула алгебры высказываний, равносильна формуле, представляющей некоторую булеву функцию f , будет представлять функцию, равную f .

В частности, одной из таких представляющих формул будет:

СДНФ – совершенная дизъюнктивная нормальная форма (если данная булева функция не равна тождественно 0);

СКНФ – совершенная конъюнктивная нормальная форма (если данная булева функция не равна тождественно 1).

Булевы функции от одного и двух аргументов

Определение. Булевой функцией от одного аргумента называется функция f , заданная на множестве из двух элементов $\{0; 1\}$ и принимающая значения в том же двухэлементном множестве.

Всего имеется четыре различных булевых функций от одного аргумента:

	0	x	x'	1
x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

$f_0(x) = 0$ – функция, тождественно равная 0 (тождественный ноль);

$f_1(x) = x$ – тождественная функция;

$f_2(x) = x'$ – функция, называемая отрицанием;

$f_3(x) = 1$ – функция, тождественно равная 1 (тождественная единица).

Определение. Булевой функцией от двух аргументов называется функция $g(x; y)$, заданная на множестве из двух элементов $\{0; 1\} \times \{0; 1\}$ и принимающая значения в том же двухэлементном множестве $\{0; 1\}$.

Все возможные булевы функции от двух аргументов:

		0	·	$\rightarrow'$	x	$\leftarrow'$	y	+	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	y'	$\leftarrow$	x'	$\rightarrow$		1
x	y	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Многие из приведённых функций имеют названия и специальные обозначения. Приведём их, сгруппировав функции в пары по тому принципу, что каждая функция из пары является отрицанием другой функции этой пары.

$g_0(x; y) = 0$ – тождественный ноль

$g_{15}(x; y) = 1$ – тождественная единица

$g_1(x; y) = (x \cdot y)$ – конъюнкция

$g_{14}(x; y) = (x \cdot y)' = (x|y)$ – штрих Шеффера

$g_7(x; y) = (x \vee y)$ – дизъюнкция

$g_8(x; y) = (x \vee y)' = x \downarrow y$ – стрелка Пирса (функция Вебба)

$g_{13}(x; y) = (x \rightarrow y)$ – импликация

$g_2(x; y) = (x \rightarrow y)'$ – отрицание импликации

$g_{11}(x; y) = (y \rightarrow x)$ – антиимпликация (обратная импликация)

$g_4(x; y) = (y \rightarrow x)'$ – отрицание антиимпликации

$g_9(x; y) = (x \leftrightarrow y)$ – эквивалентность

$g_6(x; y) = (x \leftrightarrow y)' = (x + y)$ – сложение по модулю два (сумма Жегалкина)

$g_3(x; y) = x$

$g_{12}(x; y) = x'$

$g_5(x; y) = y$

$g_{10}(x; y) = y'$

Свойства дизъюнкции, конъюнкции и отрицания:

- $x \vee x = x;$
- $x \cdot x = x;$
- $x \vee y = y \vee x;$
- $x \cdot y = y \cdot x;$
- $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z);$
- $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z);$
- $x \vee 1 = 1;$
- $x \cdot 1 = x;$
- $x \vee 0 = x;$
- $x \cdot 0 = 0;$
- $x \vee (y \cdot z) = (x \vee y) \cdot (x \vee z);$
- $x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z);$
- $x \vee (y \cdot x) = x;$
- $x \cdot (y \vee x) = x;$
- $(x \vee y)' = x' \cdot y';$
- $(x \cdot y)' = x' \vee y';$
- $x \vee x' = 1;$
- $x \cdot x' = 0;$
- $x'' = x;$

Свойства эквивалентности, импликации и отрицания:

20. $x \leftrightarrow x = 1;$

21. $x \leftrightarrow x' = 0;$

22. $x \leftrightarrow y = y \leftrightarrow x;$

23. $(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z = x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z)$

24. $1 \leftrightarrow x = x;$

25. $0 \leftrightarrow x = x';$

26. $x' \leftrightarrow y' = x \leftrightarrow y;$

27. $x' \rightarrow y' = y \rightarrow x;$

28. $x \rightarrow x = 1;$

29. $x \rightarrow x' = x';$

30. $x' \rightarrow x = x;$

31. $1 \rightarrow x = x;$

32. $0 \rightarrow x = 1;$

33. $x \rightarrow 1 = 1;$

34. $x \rightarrow 0 = x';$

Выражение одних булевых функций через другие:

35. $x \cdot y = (x' \vee y')';$

36. $x \vee y = (x' \cdot y')';$

37. $x \vee y = (x \rightarrow y) \rightarrow y;$

38. $x \vee y = x' \rightarrow y;$

39. $x \rightarrow y = x' \vee y;$

40. $(x \leftrightarrow y) = (x \rightarrow y) \cdot (y \rightarrow x);$

41. $x' = x|x;$

42. $x|y = (x \cdot y)';$

43. $x \vee y = x'|y' = (x|x)|(y|y);$

44. $x' = x \downarrow x;$

45. $x \downarrow y = (x \vee y)';$

46. $x \cdot y = x' \downarrow y' = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y).$