

## ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

Предикаты вслед за высказываниями являются следующим важным предметом, исследуемым математической логикой. Понятие предиката обобщает понятие высказывания, а теория предикатов представляет собой более тонкий инструмент, по сравнению с теорией высказываний, для изучения закономерностей процессов умозаключения и логического следования, составляющих предмет математической логики. В настоящей главе рассматриваются основы теории предикатов.

### Основные понятия, связанные с предикатами

**Понятие предиката.** В высказывании все четко: это — конкретное утверждение о конкретных объектах — истинное или ложное. Предикат — предложение, похожее на высказывание, но все же им не являющееся: о нем нельзя судить, истинно оно или ложно. Дадим точное определение.

**Определение 18.1.** Определенным на множествах  $M_1, M_2, \dots, M_n$   $n$ -местным предикатом называется предложение, содержащее  $n$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , превращающееся в высказывание при подстановке вместо этих переменных любых конкретных элементов из множеств  $M_1, M_2, \dots, M_n$  соответственно.

Для  $n$ -местного предиката будем использовать обозначение  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Переменные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называют *предметными*, а элементы множеств  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , которые эти переменные пробегают, — конкретными предметами. Всякий  $n$ -местный предикат  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , определенный на множествах  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , представляет собой функцию  $n$  аргументов, заданную на указанных множествах и принимающую значения в множестве всех высказываний. Поэтому предикат называют также *функцией-высказыванием*.

Рассмотрим п р и м е р. Предложение «Река  $x$  впадает в озеро Байкал» является одноместным предикатом, определенным над множеством всех названий рек. Подставив вместо предметной переменной  $x$  название «Баргузин», получим высказывание «Река Баргузин впадает в озеро Байкал». Это высказывание истинно. Подставив вместо предметной переменной  $x$  название «Днепр», получим ложное высказывание «Река Днепр впадает в озеро Байкал».

Другой п р и м е р. Предложение (выражение) « $x^2 + y^2 \leq 9$ » является двухместным предикатом, заданным над множествами  $R, R$ . Множества, на которых задан двухместный предикат, совпадают (говорят, что «двухместный предикат задан на множестве  $R^2$ »). Пара действительных чисел 2, 2 превращает данный предикат в истинное высказывание: « $2^2 + 2^2 \leq 9$ », а пара чисел 2, 3 — в ложное: « $2^2 + 3^2 \leq 9$ ».

Отметим еще один подход к понятию предиката. Как отмечалось, предикат  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , определенный на множествах  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , превращается в конкретное высказывание  $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , если вместо предметных переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  подставить в него конкретные предметы (элементы  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ) из множеств  $M_1, M_2, \dots, M_n$  соответственно. Это высказывание может быть либо истинным, либо ложным, т. е. его логическое значение равно 1 или 0. Следовательно, данный предикат определяет функцию  $n$  аргументов, заданную на множествах  $M_1, M_2, \dots, M_n$  и принимающую значение в двухэлементном множестве  $\{0, 1\}$ . Иногда эту функцию и называют предикатом.

**Классификация предикатов.** *Определение 18.2.* Предикат  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , заданный на множествах  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , называется:

а) *тождественно истинным*, если при любой подстановке вместо переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  любых конкретных предметов  $a_1, a_2, \dots, a_n$  из множеств  $M_1, M_2, \dots, M_n$  соответственно он превращается в истинное высказывание  $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ;

б) *тождественно ложным*, если при любой подстановке вместо переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  любых конкретных предметов из множеств  $M_1, M_2, \dots, M_n$  соответственно он превращается в ложное высказывание;

в) *выполнимым (опровержимым)*, если существует по меньшей мере один набор конкретных предметов  $a_1, a_2, \dots, a_n$  из множеств  $M_1, M_2, \dots, M_n$  соответственно, при подстановке которых вместо соответствующих предметных переменных в предикат  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  последний превратится в истинное (ложное) высказывание  $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

Приведем примеры. Одноместный предикат «Город  $x$  расположен на берегу реки Волги», определенный на множестве названий городов, является выполнимым, потому что существуют города, названия которых превращают данный предикат в истинное высказывание, или, иначе, удовлетворяют этому предикату

В другом примере одноместный предикат « $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ », определенный на множестве действительных чисел, тождественно истинный. Наконец, двухместный предикат « $x^2 + y^2 < 0$ », заданный также на множестве действительных чисел, является тождественно ложным предикатом, потому что любая пара действительных чисел превращает его в ложное высказывание (не удовлетворяет ему).

Отметим некоторые достаточно очевидные закономерности взаимосвязей между предикатами различных типов (рекомендуется осмыслить их): 1) каждый тождественно истинный предикат является выполнимым, но обратное неверно; 2) каждый тождественно ложный предикат является опровержимым, но обратное неверно; 3) каждый не тождественно истинный предикат будет опровержимым, но, вообще говоря, не будет тождественно ложным; 4) каждый не тождественно ложный предикат будет выполнимым, но, вообще говоря, не будет тождественно истинным.

**Множество истинности предиката.** *Определение 18.3.* Множеством истинности предиката  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , заданного на множествах  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , называется совокупность всех упорядоченных  $n$ -систем  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , в которых  $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, \dots, a_n \in M_n$ , таких, что данный предикат обращается в истинное высказывание  $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$  при подстановке  $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n$ . Это множество будем обозначать  $P^+$ . Таким образом,

$$P^+ = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : \lambda(P(a_1, a_2, \dots, a_n)) = 1\}.$$

Множество  $P^+$  истинности  $n$ -местного предиката  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  представляет собой  $n$ -арное отношение между элементами множеств  $M_1, M_2, \dots, M_n$ . Если предикат  $P(x)$  — одноместный, заданный над множеством  $M$ , то его множество истинности  $P^+$  является подмножеством множества  $M$ :  $P^+ \subseteq M$ .

Например, множеством истинности двухместного предиката «Точка  $x$  принадлежит прямой  $y$ », заданного на множестве  $E$  всех точек плоскости и на множестве  $F$  всех прямых этой плоскости, является бинарное отношение принадлежности (инцидентности) между точками и прямыми плоскости. Другой пример. Множество истинности двухместного предиката  $S(x, y)$ : « $x^2 + y^2 = 9$ », заданного на множестве  $R^2$ , есть множество всех таких пар действительных чисел, которые являются координатами точек плоскости, образующими окружность с центром в начале координат и радиуса 3. Наконец, если  $A(x)$ : « $|x| > 2$ » — одноместный предикат над  $R$ , то  $A^+ = ] -\infty, -2 [ \cup ] 2, +\infty [$ .

В терминах множества истинности легко выразить понятия, связанные с классификацией предикатов (определение 18.2). В самом деле,  $n$ -местный предикат  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , заданный на множествах  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , будет:

а) тождественно истинным тогда и только тогда, когда  $P^+ = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ ;

б) тождественно ложным тогда и только тогда, когда  $P^+ = \emptyset$ ;

в) выполнимым тогда и только тогда, когда  $P^+ \neq \emptyset$ ;

г) опровержимым тогда и только тогда, когда  $P^+ \neq M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ .

На языке множеств истинности еще более отчетливо проясняются закономерности взаимосвязей между предикатами различных типов, отмеченные в конце предыдущего пункта. Проанализируйте их еще раз.

**Равносильность и следование предикатов.** *Определение 18.4.* Два  $n$ -местных предиката  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , заданных над одними и теми же множествами  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , называются *равносильными*, если набор предметов (элементов)  $a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, \dots, a_n \in M_n$  превращает первый предикат в истинное высказывание  $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$  в том и только в том случае, когда этот набор предметов превращает второй предикат в истинное высказывание  $Q(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

Другими словами (на языке множеств истинности), предикаты  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$  равносильны тогда и только тогда, когда их множества истинности совпадают:  $P^+ = Q^+$ .

Утверждение о равносильности двух предикатов  $P$  и  $Q$  символически будем записывать так:  $P \Leftrightarrow Q$ . Отношение равносильности предикатов является отношением эквивалентности, так что совокупность всех  $n$ -местных предикатов, определенных на множествах  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , распадается на непересекающиеся классы равносильных предикатов (все они определяют одну и ту же функцию, заданную на множествах  $M_1, M_2, \dots, M_n$  и принимающую значения в двухэлементном множестве  $\{0, 1\}$ ). Переход от предиката  $P_1$  к равносильному ему предикату  $P_2$  называется *равносильным преобразованием* первого. Это понятие очень важно для школьной математики, потому что изучаемые в ней уравнения и неравенства представляют собой частные виды предикатов. Решение уравнения и неравенства есть поиск их множеств истинности. При таком поиске мы проделываем над уравнением и неравенством различные преобразования, и здесь важно, чтобы эти преобразования были равносильными, т.е. чтобы найденное множество оказалось бы множеством истинности именно исходного уравнения или неравенства. Аналогична ситуация при решении систем уравнений или неравенств.

Рассмотрим простой п р и м е р. Пусть требуется решить уравнение (найти множество истинности предиката):  $4x - 2 = -3x - 9$ . Преобразуем его равносильным образом:  $4x - 2 = -3x - 9 \Leftrightarrow 4x + 3x = -9 + 2 \Leftrightarrow x = -1$ . О т в е т:  $\{-1\}$  — множество всех решений данного уравнения (множество истинности данного предиката).

Отметим следующее немаловажное обстоятельство: может быть так, что два предиката равносильны, если их рассматривать над одним множеством, и неравносильны, если их рассматривать над другим (в частности, объемлющим первое) множеством. Такова, например, ситуация с предикатами:  $\sqrt{x \cdot y} = 15$  и  $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 15$  (см. № 9.22, з Задачника).

**Определение 18.5.** Предикат  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , заданный над множествами  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , называется *следствием* предиката  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , заданного над теми же множествами, если он превращается в истинное высказывание на всех тех наборах значений предметных переменных из соответствующих множеств, на которых в истинное высказывание превращается предикат  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Другими словами (в терминах множеств истинности), можно сказать, что предикат  $Q$  является следствием предиката  $P$  тогда и только тогда, когда  $P^+ \subseteq Q^+$ .

Утверждение о том, что предикат  $Q$  является следствием предиката  $P$ , будем символически записывать так:  $P \Rightarrow Q$ .

Например, одноместный предикат, определенный на множестве натуральных чисел, « $n$  делится на 3» является следствием одноместного предиката, определенного на том же множестве, « $n$  делится на 6». Из двух предикатов, упомянутых перед последним определением, первый будет следствием второго, если считать, что оба предиката заданы на множестве  $Z$  целых чисел.

Язык множеств истинности позволяет установить взаимосвязь между понятиями равносильности и следования предикатов: два предиката, определенные на одних и тех же множествах, равносильны тогда и только тогда, когда каждый из них является следствием другого. Кроме того, этот же язык дает возможность без труда установить следующие простые теоремы.

**Теорема 18.6.** *Каждые два тождественно истинных (тождественно ложных) предиката, заданных на одних и тех же множествах, равносильны. Обратно, всякий предикат, равносильный тождественно истинному (тождественно ложному) предикату, сам является тождественно истинным (тождественно ложным) предикатом.*

**Теорема 18.7.** *Каждый тождественно истинный  $n$ -местный предикат является следствием любого другого  $n$ -местного предиката, определенного на тех же множествах. Каждый  $n$ -местный предикат является следствием любого тождественно ложного  $n$ -местного предиката, определенного на тех же множествах.*

**Теорема 18.8.** *Пусть  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — два  $n$ -местных предиката, определенные на одних и тех же множествах, такие, что  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$  есть следствие  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Тогда:*

а) *если  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  тождественно истинный (выполнимый), то и  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$  тождественно истинный (выполнимый);*

б) *если  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$  тождественно ложный (опровержимый), то и  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  тождественно ложный (опровержимый).*