

Нормальные формы

Для каждой формулы алгебры высказываний можно указать равносильную ей формулу, содержащую из логических связок лишь отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию. Для этого нужно, используя равносильности, выразить все имеющиеся импликации и эквивалентности через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию. Выразить данную формулу через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию не одним способом, а многими.

Например:

$$a) (\bar{X} \wedge (X \rightarrow Y)) \rightarrow Y \equiv (\bar{X} \wedge (\bar{X} \vee Y)) \rightarrow Y \equiv \overline{(\bar{X} \wedge (\bar{X} \vee Y))} \vee Y;$$

$$b) (\bar{X} \wedge (X \rightarrow Y)) \rightarrow Y \equiv (\bar{X} \wedge (\bar{X} \vee Y)) \rightarrow Y \equiv \bar{X} \rightarrow Y \equiv \bar{\bar{X}} \vee Y \equiv X \vee Y.$$

Конъюнктивным одночленом от переменных $X_1, X_2, \dots, X_n$ называется конъюнкция этих переменных или их отрицаний.

Например: $(X_1 \wedge X_1)$, $(X_1 \wedge X_2 \wedge \bar{X}_1)$, $(X_1 \wedge X_5 \wedge \bar{X}_5)$.

Дизъюнктивным одночленом от переменных $X_1, X_2, \dots, X_n$ называется дизъюнкция этих переменных или их отрицаний.

Например: $(X_1 \vee X_1)$, $(X_1 \vee X_2 \vee \bar{X}_1)$, $(X_1 \vee X_5 \vee \bar{X}_5)$.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция конъюнктивных одночленов, т.е. выражений вида $K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_p$, где все $K_i, i = 1, 2, \dots, p$, являются конъюнктивными одночленами (не обязательно различными).

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция дизъюнктивных одночленов, т.е. выражений вида $D_1 \wedge D_2 \wedge \dots \wedge D_q$, где все $D_j, j = 1, 2, \dots, q$, являются дизъюнктивными одночленами (не обязательно различными).

Указанные выражения при $p = 1, q = 1$, также принято называть нормальными формами.

Всякая формула обладает как дизъюнктивной, так и конъюнктивной нормальными формами. У данной формулы F этих нормальных форм неограниченно много. Одни из них более громоздкие и сложные, другие – более простые.

Среди множества дизъюнктивных (равно как и конъюнктивных) нормальных форм, которыми обладает данная формула, существует уникальная форма: она единственная для данной формулы. Это так называемая совершенная дизъюнктивная нормальная форма (среди конъюнктивных – совершенная конъюнктивная нормальная форма).

Одночлен (конъюнктивный или дизъюнктивный) от переменных $X_1, X_2, \dots, X_n$ называется совершенным, если в него от каждой пары $X_i, \bar{X}_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$) входит только один представитель (X_i или $\bar{X}_i$).

Нормальная форма (конъюнктивная или дизъюнктивная) от переменных $X_1, X_2, \dots, X_n$ называется совершенной от этих переменных, если в неё входят лишь совершенные одночлены (конъюнктивные или дизъюнктивные) от $X_1, X_2, \dots, X_n$.

**Представление формул алгебры высказываний
совершенными дизъюнктивными нормальными формами (СДНФ).**

Введём обозначение, которое будет удобно использовать в дальнейшем:

$$X^\alpha = \begin{cases} X, & \text{если } \alpha = 1, \\ \bar{X}, & \text{если } \alpha = 0. \end{cases}$$

Введём ещё одно обозначение. Вместо дизъюнкции $X_1 \vee X_2 \vee \dots \vee X_n$ будем писать $\vee_{i=1}^n X_i$.

В частности, запись $\vee_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}^n H(X_1, X_2, \dots, X_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ обозначает дизъюнкцию всевозможных выражений формул $H(X_1, X_2, \dots, X_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, зависящих от переменных $X_1, X_2, \dots, X_n$, когда индексы суммирования (дизъюнктирования) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ пробегают всевозможные упорядоченные наборы длины n , составленные из нулей и единиц.

Например.

$$\begin{aligned} \vee_{(\alpha, \beta)} H(X^\alpha \wedge Y^\beta) &= (X^0 \wedge Y^0) \vee (X^0 \wedge Y^1) \vee (X^1 \wedge Y^0) \vee (X^1 \wedge Y^1) = \\ &= (\bar{X} \wedge \bar{Y}) \vee (\bar{X} \wedge Y) \vee (X \wedge \bar{Y}) \vee (X \wedge Y). \end{aligned}$$

Лемма. Для всякой формулы алгебры высказываний $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ справедливо разложение

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) \equiv \vee_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}^n (F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \wedge X_1^{\alpha_1} \wedge X_2^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge X_n^{\alpha_n}).$$

Теорема. Каждая не тождественно ложная формула алгебры высказываний от n аргументов имеет единственную (с точностью до перестановки дизъюнктивных членов) СДНФ.

**Представление формул алгебры высказываний
совершенными конъюнктивными нормальными формами (СКНФ).**

Введём обозначение, которое будет удобно использовать в дальнейшем:

$${}^\beta X = \begin{cases} \bar{X}, & \text{если } \beta = 1, \\ X, & \text{если } \beta = 0. \end{cases}$$

Введём ещё одно обозначение. Вместо конъюнкции $X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_n$ будем писать $\wedge_{i=1}^n X_i$.

В частности, запись $\wedge_{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}^n H(X_1, X_2, \dots, X_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ обозначает конъюнкцию всевозможных выражений формул $H(X_1, X_2, \dots, X_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, зависящих от переменных $X_1, X_2, \dots, X_n$, когда индексы суммирования (конъюнктирования) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ пробегают всевозможные упорядоченные наборы длины n , составленные из нулей и единиц.

Например.

$$\begin{aligned} \wedge_{(\alpha, \beta)} H({}^\beta X \vee {}^\alpha Y) &= ({}^0 X \vee {}^0 Y) \wedge ({}^0 X \vee {}^1 Y) \wedge ({}^1 X \vee {}^0 Y) \wedge ({}^1 X \vee {}^1 Y) = \\ &= (X \vee Y) \wedge (X \vee \bar{Y}) \wedge (\bar{X} \vee Y) \wedge (\bar{X} \vee \bar{Y}). \end{aligned}$$

Лемма. Для всякой формулы алгебры высказываний $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ справедливо разложение

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) \equiv \wedge_{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)}^n (F(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \vee {}^{\beta_1} X_1 \vee {}^{\beta_2} X_2 \vee \dots \vee {}^{\beta_n} X_n).$$

Теорема. Каждая не тождественно ложная формула алгебры высказываний от n аргументов имеет единственную (с точностью до перестановки конъюнктивных членов) СКНФ.

Способы приведения формул алгебры высказываний к совершенной нормальной форме.

Первый способ проистекает из способа задания формул с помощью таблицы истинности.

Для СДНФ формула имеет вид:

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) \equiv \bigvee_{F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)=1} (X_1^{\alpha_1} \wedge X_2^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge X_n^{\alpha_n}),$$

где $X^\alpha = \begin{cases} X, & \text{если } \alpha = 1, \\ \bar{X}, & \text{если } \alpha = 0. \end{cases}$

Эта формула описывает правило **(алгоритм) отыскания СДНФ**:

1. Нужно выбрать все те наборы значений её переменных, на которых формула принимает значение 1;
2. Для каждого такого набора выписать совершенный конъюнктивный одночлен, принимающий значение 1 на этом наборе и только на нём;
3. Полученные совершенные конъюнктивные одночлены соединить знаками дизъюнкции.

Для СКНФ формула имеет вид:

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) \equiv \bigwedge_{F(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)=0} (\beta_1 X_1 \vee \beta_2 X_2 \vee \dots \vee \beta_n X_n),$$

где $\beta X = \begin{cases} \bar{X}, & \text{если } \beta = 1, \\ X, & \text{если } \beta = 0. \end{cases}$

Эта формула описывает правило **(алгоритм) отыскания СКНФ**:

1. Нужно выбрать все те наборы значений её переменных, на которых формула принимает значение 0;
2. Для каждого такого набора выписать совершенный дизъюнктивный одночлен, принимающий значение 0 на этом наборе и только на нём;
3. Полученные совершенные конъюнктивные одночлены соединить знаками дизъюнкции.

Например:

Формула $F(X, Y, Z)$ задана таблицей:

X	Y	Z	$F(X, Y, Z)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

Значение 1 формула принимает на следующих наборах значений своих переменных: (0,0,0), (0,1,0), (0,1,1), (1,0,0), (1,1,1).

$$\begin{aligned} F(X, Y, Z) &\equiv \bigvee_{F(X,Y,Z)=1} (X^\alpha \wedge Y^\beta \wedge Z^\gamma) \equiv (X^0 \wedge Y^0 \wedge Z^0) \vee (X^0 \wedge Y^1 \wedge Z^0) \vee \\ &\vee (X^0 \wedge Y^1 \wedge Z^1) \vee (X^1 \wedge Y^0 \wedge Z^0) \vee (X^1 \wedge Y^1 \wedge Z^1) \equiv \\ &\equiv (\bar{X} \wedge \bar{Y} \wedge \bar{Z}) \vee (\bar{X} \wedge Y \wedge \bar{Z}) \vee (\bar{X} \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge \bar{Y} \wedge \bar{Z}) \vee (X \wedge Y \wedge Z). \end{aligned}$$