

Логические операции над предикатами

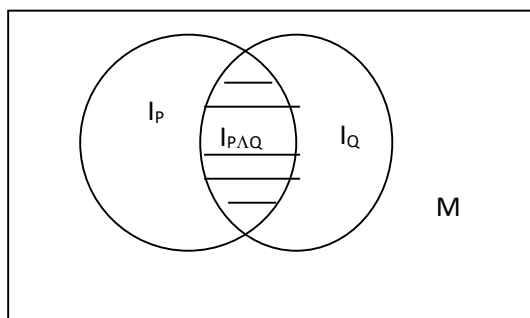
Предикаты, так же, как высказывания, принимают два значения истина и ложь (1, 0), поэтому к ним применимы все операции логики высказываний.

Рассмотрим применение операций логики высказываний к предикатам на примерах одноместных предикатов.

Пусть на некотором множестве M определены два предиката $P(x)$ и $Q(x)$.

Определение: *Конъюнкцией* двух предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $P(x) \wedge Q(x)$, который принимает значение «истина» при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых каждый из предикатов принимает значение «истина», и принимает значение «ложь» во всех остальных случаях.

Областью истинности предиката $P(x) \wedge Q(x)$ является общая часть областей истинности предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, то есть: $I_{P \wedge Q} = I_P \cap I_Q$. Соответствующая диаграмма имеет вид:

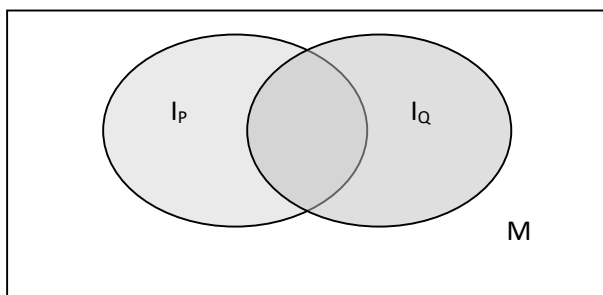


Примеры:

Для предикатов $P(x)$: « x – четное число» и $Q(x)$: « x кратно 3» конъюнкцией $P(x) \wedge Q(x)$ является предикат « x – четное число и x кратно 3», то есть предикат « x делится на 6» и область истинности $I_{P \wedge Q} = I_P \cap I_Q = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\} \cap \{3, 6, 9, 12, \dots, 3n, \dots\} = \{6, 12, 18, \dots, 6n, \dots\}$.

Определение. *Дизъюнкцией* двух предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $P(x) \vee Q(x)$, который принимает значение «ложь» при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых каждый из предикатов принимает значение «ложь» и принимает значение «истина» во всех остальных случаях.

Областью истинности предиката $P(x) \vee Q(x)$ является объединение областей истинности предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, то есть: $I_{P \vee Q} = I_P \cup I_Q$.

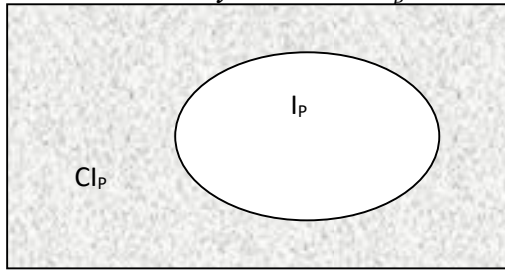


Пример: Для предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ областью истинности их дизъюнкции является объединение их областей истинности:

$I_{P \vee Q} = I_P \cup I_Q = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\} \cup \{3, 6, 9, 12, \dots, 3n, \dots\} = \{2, 3, 4, 6, \dots, 2n, 3n, \dots\}$.

Определение. *Отрицанием* предиката $P(x)$ называется новый предикат $\bar{P}(x)$, который принимает значение «истина» при всех значениях $x \in M$, при которых предикат $P(x)$ принимает значение «ложь», и принимает значение «ложь» при тех значениях $x \in M$, при которых предикат $P(x)$ принимает значение «истина».

Из этого определения следует, что $I_{\bar{P}} = M \setminus I_P = CI_P$.



Пример: составим предикат $\bar{P}(x)$: « x – нечетное число», его область истинности:

$$I_{\bar{P}} = CI_P = \{1, 3, 5, \dots, 2n - 1, \dots\}.$$

Определение . Импликацией предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $P(x) \rightarrow Q(x)$, который является ложным при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых одновременно $P(x)$ принимает значение «истина», а $Q(x)$ - значение «ложь» и принимает значение «истина» во всех остальных случаях.

Так как при каждом фиксированном $x \in M$ справедлива равносильность $P(x) \rightarrow Q(x) \equiv \bar{P}(x) \vee Q(x)$, то $I_{P \rightarrow Q} = I_{\bar{P}} \cup I_Q = CI_P \cup I_Q$.

