

Высказывания и операции над ними.

Понятие высказывания. Основным (неопределяемым) понятием математической логики является понятие «простого высказывания».

Определение 1. Под **высказыванием** обычно понимают всякое повествовательное предложение, утверждающее что-либо о чем-либо, и при этом мы можем сказать, истинно оно или ложно в данных условиях места и времени. Логическими значениями высказываний являются «истина» и «ложь».

Приведем примеры высказываний.

- 1) «Москва — столица России»;
- 2) «Число 6 делится на 4 и на 2»;
- 3) «Все люди смертны»;
- 4) «Сократ — великий ученый современности»;
- 5) « $7 < 4$ »;
- 6) Если юноша окончил среднюю школу, то он получает аттестат зрелости.

Высказывания 1), 3), 5) истинны, а высказывания 2) и 4), 5) ложны.

Очевидно, предложение «Да здравствуют наши спортсмены!» не является высказыванием.

Высказывание, представляющее собой одно утверждение, принято называть **простым или элементарным**.

Примерами элементарных высказываний могут служить высказывания 1) и 3), 4).

Высказывания, которые получаются из элементарных с помощью грамматических связей «не», «и», «или», «если ..., то ...», «тогда и только тогда», принято называть **сложными или составными**. Так, высказывание 2) образовано из элементарных высказываний «Число 6 делится на 4», «Число 6 делится на 2», соединенных союзом «и». Высказывание 6) получается из простых высказываний «Юноша окончил среднюю школу», «Юноша получает аттестат зрелости» с помощью грамматической связки «если ..., то ...». Аналогично сложные высказывания могут быть получены из простых высказываний с помощью грамматических связей «или», «тогда и только тогда».

Договоримся обозначать конкретные высказывания начальными заглавными и малыми буквами латинского алфавита $A, B, C, D, \dots; a, b, c, d, \dots$. истинное значение высказывания — буквой 1 или цифрой 1 , а ложное значение — буквой 0 или цифрой 0 . Если высказывание A истинно, то будем писать $A = 1$, а если A ложно, то $A = 0$.

Логические операции над высказываниями

Определение 2. Отрицанием высказывания x называется новое высказывание, которое является истинным, если высказывание x ложно, и ложным, если высказывание x истинно.

Отрицание высказывания x обозначается $\bar{x}$ и читается «не x » или «неверно, что x ».

Логические значения высказывания x можно описать с помощью таблицы

x	$\bar{x}$
1	0
0	1

Таблицы такого вида принято называть таблицами истинности.

Пусть x высказывание. Так как x также является высказыванием, то можно образовать отрицание высказывания x , то есть высказывание $\bar{x}$, которое называется двойным отрицанием высказывания x . Ясно, что логические значения высказываний x и $\bar{\bar{x}}$ совпадают.

Определение. Конъюнкция (логическое умножение) двух высказываний x , y называется новое высказывание, которое считается истинным, если оба высказывания x , y истинны, и ложным, если хотя бы одно из них ложно.

Конъюнкция высказываний x , y обозначается символом $x \& y$ или $(x \wedge y)$, читается « x и y ». Высказывания x , y называются членами конъюнкции.

Логические значения конъюнкции описываются следующей таблицей истинности:

x	y	$x \& y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Пример 2. Для высказываний «6 делится на 2», «6 делится на 3» их конъюнкцией будет высказывание «6 делится на 2 и 6 делится на 3», которое, очевидно, истинно.

Из определения операции конъюнкции видно, что союз «и» в алгебре логики употребляется в том же смысле, что и в повседневной речи. Но в обычной речи не принято соединять союзом «и» два высказывания далеких друг от друга по содержанию, а в алгебре логики рассматривается конъюнкция двух любых высказываний. Из определения операции конъюнкции и отрицания ясно, что высказывание $x \& \bar{x}$ всегда ложно.

Определение. Дизъюнкцией (логическое сложение) двух высказываний x , y называется новое высказывание, которое считается истинным, если хотя бы одно из высказываний x , y истинно, и ложным, если они оба ложны.

Дизъюнкция высказываний x , y обозначается символом $x \vee y$, читается « x или y ». Высказывания x , y называются членами дизъюнкции.

Логические значения дизъюнкции описываются следующей таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Пример 3. Высказывание «В треугольнике DFE угол D или угол E острый» истинно, так как обязательно истинно хотя бы одно из высказываний: «В треугольнике DFE угол D острый», «В треугольнике DFE угол E острый».

В повседневной речи союз «или» употребляется в различном смысле: исключающем и не исключающем. В алгебре логики союз «или» всегда употребляется в не исключающем смысле.

Из определения операции дизъюнкции и отрицания ясно, что высказывание $x \vee \bar{x}$ всегда истинно.

Определение. Импликацией двух высказываний x , y называется новое высказывание, которое считается ложным, если x истинно, а y - ложно, и истинным во всех остальных случаях.

Импликация высказываний x , y обозначается символом $x \rightarrow y$, читается «если x , то y » или «из x следует y ». Высказывание x называют условием или посылкой, высказывание y - следствием или заключением, высказывание $x \rightarrow y$ - следованием или импликацией.

Логические значения операции импликации описываются следующей таблицей истинности:

x	y	$x \rightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Пример 4. Высказывание «Если число 12 делится на 6, то оно делится на 3», очевидно, истинно, так как здесь истинна посылка «Число 12 делится на 6» и истинно заключение «Число 12 делится на 3».

Употребление слов «если ..., то ...» в алгебре логики отличается от употребления их в обыденной речи, где мы, как правило, считаем, что, если высказывание x ложно, то высказывание «Если x , то y » вообще не имеет смысла.

Кроме того, строя предложение вида «если x , то y » в обыденной речи, мы всегда подразумеваем, что предложение y вытекает из предложения x . Употребление слов «если..., то ...» в математической логике не требует этого, поскольку в ней смысл высказываний не рассматривается.

Импликация играет важную роль в математических доказательствах, так как многие теоремы формулируются в условной форме «Если x , то y ». Если при этом известно, что x истинно и доказана истинность импликации $x \rightarrow y$, то мы вправе сделать вывод об истинности заключения y .

Определение. Эквиваленцей (или эквивалентностью) двух высказываний x , y называется новое высказывание, которое считается истинным, когда оба высказывания x , y либо одновременно истинны, либо одновременно ложны, и ложным во всех остальных случаях.

Эквиваленция высказываний x , y обозначается символом $x \leftrightarrow y$, читается «для того, чтобы x , необходимо и достаточно, чтобы y или x тогда и только тогда, когда y ». Высказывания x , y называются членами эквиваленции.

Логические значения операции эквиваленции описываются следующей таблицей истинности:

x	y	$x \leftrightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Пример 5. Эквиваленция «Треугольник SPQ с вершиной S и основанием PQ равнобедренный тогда и только тогда, когда $ZP = ZQ$ » является истинной, так как высказывания «Треугольник SPQ с вершиной S и основанием PQ равнобедренный» и «В треугольнике SPQ с вершиной S и основанием PQ $ZP = ZQ$ » либо одновременно истинны, либо одновременно ложны.

Эквивалентность играет важную роль в математических доказательствах. Известно, что значительное число теорем формулируется в форме необходимых и достаточных условий, то есть в форме эквивалентности. В этом случае, зная об истинности или ложности одного из двух членов эквивалентности и доказав истинность самой эквивалентности, мы заключаем об истинности или ложности второго члена эквивалентности.